Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
tel. kontaktowy: 602 730 893

Łódź, 28 czerwca 2022 r.

Opinia o doktoracie p. mgra Krzysztofa Rutkowskiego
Differential Variational Inequalities related to primal-dual projection approximation schemes for operator inclusions

Przedstawiona rozprawa doktorska pana mgr. Krzysztofa Rutkowskiego została wykonana na Politechnice Warszawskiej, a jej promotorem jest pani prof. dr hab. Ewa Bednarczuk. Ta obszerna praca liczy 118 stron i jest napisana w języku angielskim; składa się ze strony tytułowej, dedykacji, streszczenia, spisu treści, wstępu, sześciu rozdziałów i spisu literatury. Wydana została w niezwykle starannej szacie graficznej w formie książki przez Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej. W dużej części rozprawa bazuje na czterech dobrze opublikowanych pracach [13], [14], [15] i [16] (numeracja zgodna z podaną w rozprawie), w których K. Rutkowski jest współautorem.

W pierwszej części recenzji omówię problematykę rozprawy; w części drugiej przedstawię uwagi dotyczące kwestii redakcyjnych i merytorycznych, zaś w podsumowaniu sformułuję ostateczną konkluzję.

Część pierwsza (zawartość rozprawy): Zawartość rozprawy doktorskiej p. Rutkowskiego dobrze odzwierciedla obszerny Wstęp. Autor bada pewne prymarne i prymarno-dualne problemy w teorii iteracyjnych algorytmów najlepszego przybliżenia stosowanych podczas rozwiązywania zagadnień (inkluzji wariacyjnej) z udziałem maksymalnie monotonicznych operatorów w przestrzeniach Hilberta postaci

$$0 \in Ap + L^*BLp, \quad p \in H, \tag{$*$}$$

gdzie H i G są przestrzeniami Hilberta, $A : H \to H$, $B : G \to G$ są operatorami maksymalnie monotonicznymi, a $L : H \to G$ jest ograniczonym operatorem liniowym, oraz stowarzyszone problemy dualne. Lecz zasadniczą cechą pracy jest podejście iteracyjne do problemu poszukiwania rozwiązań p inkluzji $(*)$, skojarzone z układem dynamicznym wyznaczonym przez autonomiczny problem Cauchy'ego z odpowiednio dobranym polem wektorowym. Takie podejście obecne jest u wielu autorów i służy najczęściej do uzyskiwania wyników dotyczących zbieżności, bądź asymptotyki zastosowanej metody iteracyjnej i pozwala na jakościowe (nie tylko ilościowe) badanie rozwiązań wyjściowego problemu. Przy takim podejściu procedura iteracyjne jest w istocie dyskretyzacją rozważanego układu dynamicznego. Warto zauważyć, że układ dynamiczny badany przez autora sterowany jest przez równanie różniczkowe, którego prawa strona nie jest globalnie lipschitzowska. Zatem pytania o istnienie rozwiązań i własności trajektorii nie można natychmiastowo rozstrzygnąć w oparciu o klasyczne twierdzenie Picarda.

W pierwszym rozdziale rozprawy autor podaje definicje podstawowych pojęć i obiektów badanych w pracy oraz formułuje kilka faktów pomocniczych dotyczących m.in. operatorów monotonicznych. Poruszamy się w przestrzeni Hilberta, co upraszcza wiele rozumowań, a rozważane zbiory są na ogół wypukłe; tak więc można posługiwać się terminologią analizy wypukłej.

Drugi rozdział rozprawy dotyczy rozważań na temat wyjściowego problemu postaci $(*)$ i jej związków z problemem dualnym postaci

$$0 \in -LA^{-1}(-Lv^*) + B^{-1}v^*. \;\; v^* \in G, \tag{$**$}$$

a także możliwych uogólnień na układy równań postaci $(*)$.

W rozdziale trzecim autor bada (abstrakcyjne) algorytmy iteracyjne, ich własności i efektywność, które po odpowiednim dostosowaniu i modyfikacji mogą służyć do wyznaczania rozwiązań inkluzji $(*)$ lub $(**)$. Ogólna idea polega na znajdowaniu zbioru rozwiązań wyjściowej inkluzji po wprowadzeniu rodziny półprzestrzeni, które go zawierają, i zastosowaniu sekwencji rzutów ortogonalnych. Metody te mają źródło w oryginalnym algorytmie Stefana Kaczmarza (i jego nieskończenie wymiarowych uogólnień, m.in. pochodzących od H. Steinhausa), jednego z członków lwowskiej szkoły matematycznej i prekursora metod iteracyjnych – warto tym pamiętać. Przedmiotem badań jest tu algorytm typy Fejéra (o ile wiem ta nazwa pochodzi od algorytmu związanego z poszukiwaniem jądra Fejéra w FFT, czyli w tzw. szybkiej transformacie Fouriera) i jego stosowalność w zagadnieniach omawianej postaci: autor, podążając za innymi autorami, starannie bada zachowanie algorytmu Fejéra i, przede wszystkim, jego zbieżność. Drugim obiektem zainteresowania autora rozprawy jest algorytm iteracyjny polegający na dodatkowym zastosowaniu w algorytmie Fejéra tzw. kroku Haugazeau, czyli na wykonaniu dodatkowego rzutu na półprzestrzeń wyznaczoną przez „krok" w procedurze Fejéra. Rola tego podejścia polega na polepszeniu charakteru zbieżności metody. W przypadku algorytmu Fejéra zwykle ma się do czynienia ze słabą zbieżnością ciągu iterat, podczas gdy w algorytmie Haugazeau ze zbieżnością mocną. Tu również autor rozprawy podaje szereg warunków dostatecznych do zastosowania tego algorytmu w przypadku zagadnień rozważanego typu. W trzeciej części omawianego rozdziału autor omawia własną modyfikację algorytmu Fejéra/Haugazeau polegającą na zastosowaniu tzw. „zrelaksowanego" kroku typu Haugazeau. Pojawia się tu interesujące Twierdzenie 3.4, w którym pokazano silną zbieżność ciągu iterat metody. a także Stwierdzenia 3.5 i 3.6 określające warunki, w których ta nowa metoda działa w przypadku inkluzji $(*)$. Dowody podanych rezultatów są technicznie złożone, lecz poprowadzone „pewną ręką". Autor rozprawy twierdzi ponadto (we Wstępie), że rozważany algorytm „ daje elastyczność w powiązaniu algorytmu z systemami dynamicznymi".

Uzasadnienie tego stwierdzenie znajduje się w rozdziale 4. Autor rozważa tu zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), \; t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \hat{D}, \end{cases} \tag{P}$$

gdzie $\hat{D}$ jest pewnym domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta X, $F : \hat{D} \to X$ jest ograniczonym i ciągłym polem wektorowym, spełniającym lokalny warunek Lipschitza poza jednym punktem $\bar{z} \in \hat{D}$. Pole F jest silnie styczne do $\hat{D}$, tzn. dla dowolnego $x \in \hat{D}$, $x + hF(x) \in \hat{D}$ (jest to mocna wersja stycznosci rozumianej jako przynależność wektora $F(x)$ do stożka kontyngentnego do $\hat{D}$ w punkcie x, czyli stożka Bouliganda). Pole F jest również w każdym punkcie $x \in \hat{D}$ styczne do zewnętrza koła o środku w pewnym punkcie $\bar{w}$ o promieniu $\|x - \bar{w}\|$, co w istocie implikuje, że trajektorie układy (P) są odpychane od $\bar{w}$. Dużą część rozdziału 4 zajmują rozważania dotyczące istnienia rozwiązań wspomnianego wyżej problemu. Rezultaty tu podane trudno uznać za całkiem oryginalne. Istnienie rozwiązań problemu (P) jest przedmiotem tzw. teorii wiabilności, zaś zachowanie rozwiązań (a w szczególności jednoznaczność istnienia itp.) należy do dobrze rozwiniętej klasycznej teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha. Rozumowanie podane w serii lematów i stwierdzeń jest bez wątpienia poprawne, lecz – jak można sądzić – trochę zbyt rozbudowane. Autorowi polecam następujące pozycje, gdzie można znaleźć (a co najmniej szybko wywnioskować) praktycznie wszystkie zamieszczone w drugiej części rozdziału 4 wyniki:

- K. Deimling, *Odinary differential equations in Banach spaces*, Lect. Notes in Math, 596, Springer 1977;
- R. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley 1976;
- O. Carja, M. Necula, I. Vrabie, *Viability, Invariance and Applications*, North-Holland Mathematics Studies 2007.

Odwołanie się do wymienionych źródeł (lub innych, a jest ich całkiem sporo rozproszonych w dostępnej literaturze) pozwoliłoby na daleko idące skróty, a także na lepsze uwypuklenie ważnych w dalszym ciągu własności (np. zawartych w ostatniej części rozdziału 4 własności asymptotycznych).

Rozdział 5 zawiera główne wyniki rozprawy doktorskiej. Mianowicie K. Rutkowski bada związki określonego w rozdziale trzecim schematu aproksymacyjnego z pewnym układem dynamicznym wyznaczonym przez równanie postaci (P). Pojawia się tutaj pojęcie rzutowego (wzdłuż pewnego pola wektorowego) układu dynamicznego, który jest w istocie równoważny z tzw. zaburzonym procesem „zamiatania"(sweeping process), a więc ewolucyjną inkluzją różniczkową sterowaną przez maksymalnie monotoniczny operator będący subróżniczką indykatrysy pewnego zbioru wypukłego (tu mamy „wariacyjny" aspekt problemu). Jak się okazuje odpowiednio zdefiniowany proces jest przykładem zagadnienia rozważanego w rozdziale 4 (wniosek 5.2 z rozprawy). Pozwala to na sformułowanie twierdzenia 5.3 i uwagi 5.6. Następnie autor zajmuje się związkami odpowiednio zdefiniowanego rzutowego układu dynamicznego z zagadnieniem wyjściowym oraz zmodyfikowanym algorytmem typu Haugazeau i uzyskuje twierdzenia 5.4 i 5.5.

Ostatni rozdział rozprawy ma, jak sądzę, nieco „eksterytorialny" charakter. Recenzentowi sprawiła pewien kłopot próba poszukiwania głębszych związków tego rozdziału z resztą pracy. Rozważania dotyczą jednak bardzo ciekawego problemu. Mianowicie autor definiuje (analitycznie) odwzorowanie wielowartościowe $X \ni p \mapsto C(p)$ (jako *explicite* zadane przecięcia półprzestrzeni), którego wartościami są wielościany i pyta o regularność takiego odwzorowanie, którą nazywa „Lipschitz-likeness", a która w literaturze nosi też nazwę „pseudo-lipschitzowości" (taką nazwę preferuje np. szkoła francuska i włoska). Okazuje się (stwierdzenie 6.5 i twierdzenie 6.2), że gdy dane odwzorowanie spełnia pewne dodatkowe warunki regularności (typu warunków kwalifikacji ograniczeń), a „parametry" odwzorowania (czyli pola wektorowe definiujące przecinające się półprzestrzenie) są lokalnie lipschitzowskie, to rozważane odwzorowanie $C(\cdot)$ jest pseudo-lipschitzowskie. Drugie zagadnienie badane w tym rozdziale dotyczy lipschitzowości rzutu $\pi_p(x)$ punktu $x \in X$ na zbiór $C(p)$ (tutaj π_p jest rzutem (ortogonalnym) przestrzeni na zbiór $C(p)$). Główne wyniki (tzn. twierdzenia 6.6 i 6.7) formułują warunki dostateczne na to by, odwzorowanie $(x, p) \mapsto \pi_p(x)$ spełniało warunki tzw. pełnej stabilności lipschitzowskiej. Wyniki rozdziału 6 są bardzo techniczne, wymagają dość silnych założeń, lecz są z pewnością wartościowe.

Część druga (ocena merytoryczna): Jestem zdania, że przedstawiona praca doktorska mgra Krzysztofa Rutkowskiego stanowi przykład solidnego rzemiosła matematycznego. Autor udowodnił, że dysponuje kulturą matematyczną i dobrą wiedzą z zakresie metod analizy wypukłej, teorii optymalizacji wypukłej, algorytmiki najlepszych przybliżeń oraz ogólnym dobrym warsztatem matematycznym. Rozumowania są na ogół kompletne i, na ile byłem w stanie je zweryfikować, poprawne. Matematyka zawarta w rozprawie oparta jest o często żmudne i wymagające cierpliwości rachunki polegające na bardzo dociekliwym sprawdzaniu zależności i wykorzystywanie dość rozbudowanych założeń. W rozprawie brak nowych pojęć, nowych technik dowodowych, gdyż autor z reguły podąża już dość dobrze „wydeptanymi" ścieżkami. Ma ona mocno syntetyczny charakter, ale taki jest charakter tej gałęzi matematyki. Nie zmniejsza to wartości rozprawy, którą postrzegam, jako fragment matematyki, w dobrym znaczeniu tego słowa, „inżynierskiej". Znakomitym przykładem takiego stawiania sprawy jest wspomniany rozdział 6. Mamy tam do czynienia z konkretnym, bardzo naturalnym odwzorowaniem wielowartościowym, którego zachowanie i regularność zależy od „parametrów" definicji. Autor konsekwentnie i cierpliwie ustala zależności pomiędzy tymi „parametrami" i potrafi wyłonić ich własności odpowiedzialne za oczekiwane zachowanie odwzorowania. Te cechy maja również rozważania z rozdziałów 3 i 5. Dlatego jestem zdania, że przedstawiona do recenzji rozprawa spełnia kryteria stawiane dobrym rozprawom doktorskim, szczególnie z punktu widzenia uczelni technicznej. Problematyka rozprawy jest aktualna i, jak sadzę, przejawia potencjalną stosowalność. Szkoda, że autor, kosztem rezygnacji w kilku miejscach z bardzo technicznych i żmudnych rachunków, nie przedstawił jakichś konkretnych zastosowań (np. problemy postaci $(*)$ to ważne z punktu widzenia mechaniki i fizyki problemy stacjonarne). Recenzentowi brakowało także pewnych nawiązań do teorii operatorów maksymalnie monotonicznych i rezultatów opartych np. o twierdznie Minty-Browdera o istnieniu. Są to wprawdzie rzeczy znane, ale ich podanie zmniejszyłoby nieco swoistą „syntetyczność" rozprawy, a także wpłynęło na pełne przekonanie o sprawności autora również w tej dziedzinie.

Autor nie ustrzegł się pewnych usterek. O paru wspomniałem powyżej. Praca zredagowana jest bardzo starannie i estetycznie – sądzę, że brak w niej błędów literowych – co jest nieczęstym zjawiskiem, lecz nie czyta się jej dobrze. Po pierwsza bardzo niedogodna numeracja (osobna dla definicji, stwierdzeń, lematów, twierdzeń itp.) powoduje, że z trudnością poszukuje się cytowanych faktów, co irytuje i często niemal uniemożliwia śledzenie rozumowań. Po drugie autor niezbyt umiejętnie gospodaruje informacjami. Nie zawsze jest jasne, który fakt stanowi oryginalny wkład autora, a który ma charakter mniej lub bardziej rozbudowanego cytowania. Z korzyścią dla pracy byłoby formułowanie najpierw głównych wyników i omówienie ich roli, a dopiero potem pomocniczych lematów. Recenzentowi zabrakło również dyskusji na temat szybkości działania i efektywności algorytmów omawianych w rozdziale 3. Tytuł pracy – zdaniem recenzenta – jest za długi i niezbyt dobrze odzwierciedla jej zawartość. Wariacyjny charakter zagadnień jest tu problematyczny i w zasadzie wyraźnie pojawia się w trzeciej części rozdziału 6. Oczywiście podane uwagi nie wpływają na ogólną pozytywną ocenę pracy.

Podsumowanie. Biorąc pod uwagę powyżej sformułowane oceny i komentarze stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska p. mgr. Krzysztofa Rutkowskiego spełnia ustawowo i zwyczajowo stawiane wymagania. W szczególności rozprawa ta prezentuje dobrą wiedzę autora i jego umiejętność do samodzielnego prowadzenia badań, a jej przedmiotem jest szereg ciekawych oryginalnych problemów wraz z ich rozwiązaniem. Wnoszę więc o dopuszczenie rozprawy mgra Rutkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wojciech Kryszewski

Wpisz tekst tutaj